EXERCICE

1°) On considère les intégrales

$$I_o = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)\, dx \qquad \text{et} \qquad J_o = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x)\, dx$$

a) Montrer que I_o converge

(on pourra utiliser : $\lim_{x \to 0+} \sqrt{x}\, |\ln(\sin x)| = 0$)

b) Montrer que :

i) $I_o = J_o$

ii) $\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\, dx = 2 I_o$

c) Déterminer la valeur de I_o

(On calculera $I_o + J_o$)

2°) soient pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos 2nx \ln(\sin x)\, dx$$

et $k_n = \int_0^{\pi/2} \dfrac{\sin[(2n+1)x]\, dx}{\sin x}$

a) Montrer que I_n a un sens

b) Prouver que $\forall\, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

$2\, n\, I_n + k_{n-1} = 0$

c) Montrer que $k_n = k_{n-1}$ $\forall n \geq 2$

d) En déduire la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3°) soit $f(x) = \ln\left|2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|$

a) Vérifier que f est paire et périodique de période 2π

b) Montrer que $\int_0^{\pi} f(x)\, dx$ converge

c) On suppose que $\forall\, x \in \left]0, \pi\right]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n x + b_n \sin n x\right)$$

où $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x\, dx \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

et $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n x\, dx \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

i) calculer a_0; a_n pour $n \in \mathbb{N}^*$ et b_n pour $n \in \mathbb{N}^*$

ii) En déduire $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

PROBLEME

I) Soit la série entière réelle de terme général

$u_n(x) = n^\alpha x^n \qquad n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}$

soit $D_\alpha = \left\{ x \in \mathbb{R} \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ converge} \right\}$

et $S_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ pour $x \in D_\alpha$

1°) Déterminer suivants les valeurs de α l'ensemble D_α

2°)

a) Etablir une relation simple entre $S_{\alpha+1}(x)$ et $S'_\alpha(x)$

pour $|x| < 1$ $\left(\text{où } S'_\alpha = \dfrac{dS_\alpha}{dx}\right)$

b) Déterminer pour $|x| < 1$ $S_0(x)$ et $S_{-1}(x)$

3°)

a) Soit $\alpha \in \mathbb{N}$ et $|x| < 1$

Montrer que $S_\alpha(x) = \dfrac{x\, P_\alpha(x)}{(1-x)^{\alpha+1}}$

où P_α est un polynôme : à cet effet, on donnera une formule de récurrence permettant le calcul de $P_{\alpha+1}$ à partir de P_α et $P'_\alpha = \dfrac{dP_\alpha}{dx}$

b) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}$

c) Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $x \neq 0$

Montrer que $x^{\alpha-1} P_\alpha\left(\frac{1}{x}\right) = P_\alpha(x)$

où P_α est le polynôme défini en 3°) a)

II) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n(x) = n^\alpha . x . e^{-n\frac{x^2}{2}}$

pour $x \geq 0$

1°) Etudier les variations de la fonctions f_n et tracer sa courbe représentative.

2°) Soit $M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} f_n(x)$ et $\Delta_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$

Déterminer les valeurs de α telles que

$$M_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

et $\Delta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

3°)

a) Montrer que la série de terme général f_n, converge simplement dans $\mathbb{R}^+$

(on traitera les cas $x = 0$ et $x > 0$)

b) Soit $T_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour $x \geq 0$

i) Pour $x > 0$, donner une expression de $T_\alpha(x)$ à l'aide de la fonction S_α (où S_α est la fonction définie au I)

ii) Montrer que T_α est continue à droite au point $x=0$ pour $\alpha \leq -1$ (on examinera les cas $\alpha = -1$ et $\alpha < -1$)

iii) T_α est-elle continue à droite au point x = o pour $\alpha \geqslant 0$

(on examinera les cas $\alpha = o$ et $\alpha > o$)

III) Soit $\alpha \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

1°) Soit $I_n = \int_0^1 \left[\ln(x)\right]^n dx$ $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que I_n converge $\forall$ $n \in \mathbb{N}$

b) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1} et calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) En déduire la valeur de l'intégrale

$$J(\alpha, n) = \int_0^1 \left[\ln(x)\right]^{\alpha-2} x^{n-1} \, dx \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*$$

(on posera $u = x^n$)

2°) Soit $t \in]0, 1[$

a) développer en série entière la fonction

$h(x) = \ln(1-tx)$

b) Montrer alors que :

$$\int_0^1 \left[\ln(x)\right]^{\alpha-2} \frac{\ln\left[1-tx\right]}{x} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} J(\alpha, n)$$

(On justifiera qu'on peut intégrer terme à terme la série obtenue après développement de ln (1-tx)

c) En déduire que :

$$S_{-\alpha}(t) = \frac{(-1)^{\alpha-1}}{(\alpha-2)!} \int_0^1 \left[\ln(x)\right]^{\alpha-2} \frac{\ln(1-tx)}{x} dx$$

où $S_{-\alpha}$ est la fonction définie au I.